



基于神经网络的线性稳定性分析方法

张二帅 刘建新 黄章峰

Linear stability analysis based on neural network

ZHANG Ershuai, LIU Jianxin, HUANG Zhangfeng

引用本文:

张二帅, 刘建新, 黄章峰. 基于神经网络的线性稳定性分析方法[J]. 空气动力学学报, 2025, 43(2): 60–74. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2024.0031

ZHANG Ershuai, LIU Jianxin, HUANG Zhangfeng. Linear stability analysis based on neural network[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2025, 43(2): 60–74. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2024.0031

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2024.0031>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于卷积神经网络的气动热预测方法

CNN-based method for predicting aerodynamic heating

空气动力学学报. 2024, 42(1): 13–25 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2023.0072>

基于卷积神经网络和状态时间序列的参数辨识

Parameter estimation based on convolutional neural network and state sequence

空气动力学学报. 2021, 39(4): 69–76 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0057>

基于深度神经网络的任意翼型结冰预测方法

Icing prediction method for arbitrary airfoil using deep neural networks

空气动力学学报. 2023, 41(7): 48–55 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2022.0116>

基于物理信息神经网络的气动数据融合方法

Aerodynamic data fusion method based on physics-informed neural network

空气动力学学报. 2023, 41(8): 87–96 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2023.0060>

卷积神经网络在风洞天平静态校准中的应用

Application of convolutional neural network in static calibration of wind tunnel balance

空气动力学学报. 2023, 41(3): 25–32 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2022.0096>

基于物理信息神经网络的飞机气动参数辨识方法

A physics informed neural network based method for aircraft aerodynamic parameter identification

空气动力学学报. 2023, 41(9): 30–37 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2022.0201>

热化学非平衡高超声速平板边界层线性稳定性分析

Linear stability analysis of hypersonic boundary layer on a flat-plate with thermal-chemical non-equilibrium effects

空气动力学学报. 2020, 38(2): 316–325 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2019.0155>

地址: 四川省绵阳市二环路南段8号11信箱9分箱

电话: 0816-2463375

Email: kqdlxxb@163.com



关注微信公众号

获得更多资讯信息

文章编号: 0258-1825(2025)02-0060-15

基于神经网络的线性稳定性分析方法

张二帅, 刘建新*, 黄章峰

(天津大学 机械工程学院, 天津 300072)

摘要: 在实现 e^N 方法时, 需要搜索流场中的不稳定波, 并大量求解当地边界层的稳定性问题, 因此为高效求解当地边界层的不稳定波参数, 提出了一种基于神经网络的线性稳定性分析方法 (neural network-based linear stability analysis, NN-LSA)。采用卷积神经网络给出最不稳定波频率 ω 、展向波数 β 、流向波数 α_r 和增长率 $\sigma_{\max}$ 的初值对, 再通过迭代法计算失稳扰动波的实际空间失稳波数和增长率。使用平板数据集训练神经网络模型, 并利用平板和尖锥算例对 NN-LSA 方法的准确性和计算效率进行验证。结果表明: 神经网络部分对不稳定波参数的预测结果与线性稳定性理论的计算结果吻合较好; LSA 部分可根据神经网络提供的预测值, 通过迭代法找到最不稳定波; NN-LSA 方法的求解效率较高, 求解时间比全局搜索方法约低 20~50 倍, 大大减小了人为因素在计算过程中的影响。本文提出的 NN-LSA 方法可以实现自动分析边界层流动的线性稳定性, 具有一定的应用潜力。

关键词: 基于神经网络的线性稳定性分析方法; 卷积神经网络; e^N 方法; 转捩预测

中图分类号: O357.4⁺; V211 文献标识码: A doi: 10.7638/kqdlxxb-2024.0031

Linear stability analysis based on neural network

ZHANG Ershuai, LIU Jianxin*, HUANG Zhangfeng

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The e^N method, which has been widely used for predicting boundary-layer transition, necessitates a meticulous search for unstable modes by solving a large number of local boundary-layer stability problems, a process that can be very time-consuming. This paper proposes a novel neural network-based linear stability analysis (NN-LSA) method, that leverages convolutional neural networks to generate an initial guess of the frequency (ω), spanwise and streamwise wave numbers (β and α_r), and growth rate ($\sigma_{\max}$) of the most unstable mode. Subsequently, the actual values are iteratively calculated based on this initial guess. The neural network model is trained using a flat plate dataset and the accuracy and computational efficiency of NN-LSA are validated by both flat plate and sharp cone test cases. The results demonstrate that the unstable wave parameters of NN are good agreement with linear stability theory. The LSA component, based on the predicted values provided by NN, can iteratively caculate the most unstable waves. Moreover, the computational time of the NN-LSA method is approximately 20 to 50 times lower than global search method, significantly improving computational efficiency and reducing the influence of human factors in the calculation process. The proposed NN-LSA method enables automated analysis of the linear stability of boundary layer flows and shows promising potential for practical applications.

Keywords: NN-LSA; convolutional neural network; e^N method; transition prediction

收稿日期: 2024-03-07; 修订日期: 2024-04-08; 录用日期: 2024-04-16; 网络出版时间: 2024-08-20

基金项目: 国家自然科学基金重大项目 (92052301); 国家自然科学基金面上项目 (12172252); 国家自然科学基金 (92271102)

作者简介: 张二帅 (1997—), 男, 河北邯郸人, 硕士, 研究方向: 流动稳定性. E-mail: es_zhang@tju.edu.cn

通信作者: 刘建新*, 副教授, 研究方向: 流动稳定性和转捩. E-mail: shookware@tju.edu.cn

引用格式: 张二帅, 刘建新, 黄章峰. 基于神经网络的线性稳定性分析方法[J]. 空气动力学学报, 2025, 43(2): 60–74.

ZHANG E S, LIU J X, HUANG Z F. Linear stability analysis based on neural network[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2025, 43(2): 60–74(in Chinese). doi: 10.7638/kqdlxxb-2024.0031

0 引言

近年来, 边界层的层流-湍流转捩问题得到越来越多的关注^[1]。边界层转捩对飞行器表面的气动力、热流交换等都有重要的影响, 因此对其准确预测是飞行器设计工程实践中需要考虑的重要问题之一^[2], 有助于实现飞行器的飞行控制、热防护系统精细设计等目的。

目前用于边界层转捩预测的方法主要有3类。(1)转捩准则法^[3-4]。其原理是基于真实飞行和风洞实验数据建立转捩判据, 再基于转捩判据预测转捩。对于不可压缩边界层, 可以定义转捩雷诺数作为转捩判据, 且目前实验较多, 建立转捩判据比较容易; 但对于可压缩边界层, 特别是高速边界层, 转捩受更多的因素制约, 如马赫数、来流温度和壁面温度等, 且实验成本高、不易实现, 因此建立较为通用的转捩判据比较困难。(2)转捩模式法^[5]。它是一种基于雷诺平均的纳维-斯托克斯 (Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS) 方程的模化方法。通过构造间歇因子或其他参数的输运方程, 并与现有成熟的湍流模型耦合求解, 实现对转捩的预测^[6]。转捩模式包含非普适参数, 限于对转捩机理的认识和实验的匮乏, 非普适参数难以标定, 为转捩预测带来不确定性。(3) e^N 方法。这是一种半理论半经验的方法, 理论基础是线性稳定性理论 (linear stability theory, LST)^[7]。通过求解边界层的线性稳定性方程获得扰动增长率并对其进行积分, 得到表征扰动幅值放大倍数的 N 值 (又称放大因子), 并基于临界的 N_{tr} 来判断转捩位置, 其中 N_{tr} 可通过大量实验标定。相比于转捩准则法和转捩模式法, e^N 方法的理论基础较为严谨, 且与转捩的物理过程联系紧密, 被认为是当前理论依据最充分的转捩预测方法。鉴于 e^N 方法预测转捩的优势, 现已广泛应用于工程转捩预测。国内外的研究单位、学者基于 e^N 方法开发了多款转捩预测软件, 其中典型的有美国航空航天局 Malik 等开发的 eMalik^[8]、Chang 开发的 LASTRAC^[9]、中国空气动力研究与发展中心联合天津大学开发的 HyTEN 软件^[10]、天津大学黄章峰开发的 FIT 软件^[11-12] 等。

基于 e^N 方法开展转捩预测需要进行大量的线性稳定性计算, 即通过求解线性稳定性方程得到扰动的增长率。但增长率的求解对应于求解一个大型稀疏矩阵特征值问题, 这需要消耗较多的时间和空间资源。因此, 为提高转捩预测的效率和鲁棒性, 同时保证预测精度, 有学者提出包络线法^[13-14] 和 e^N 数据库

法^[15-16]。这些方法通过数据拟合的方式将扰动 N 值的包络线或扰动的增长率表示为少量参数 (如边界层形状因子、雷诺数等) 的函数, 优点是简单、快速, 根据当地边界层的参数特征就可以进行转捩预测, 不需要给出边界层剖面信息。对于低速边界层, 这些方法都取得了较好的结果, 但对于高速边界层, 由于流动稳定性更加复杂, 影响流动稳定性的因素更多 (如来流马赫数、壁面温度等), 此时, 这些方法的适用性会大大受限^[17]。

近年来, 随着人工智能技术的发展以及转捩相关数据的积累, 机器学习方法在转捩预测方面的应用越来越广泛^[18]。基于代理模型的 e^N 简化方法是其中一种常见的应用, 该方法采用代理模型代替求解线性稳定性方程, 进而简化扰动增长率的计算。Fuller 等^[19]首次在线性稳定性分析过程中引入神经网络, 利用全连接神经网络 (fully connected neural network, FCNN) 预测低速剪切流中扰动的增长率。Crouch 等^[20]使用 FCNN 来预测不可压缩后掠翼边界层中的 T-S 波和横流驻波的增长率, 采用边界层内 6 个等距位置的速度一阶导数代替积分量 (如形状因子、动量厚度) 作为神经网络输入的一部分, 这种做法有助于神经网络更好地捕捉基本流和扰动增长率之间隐含的物理关系。Rajnarayan 和 Sturdza^[21]使用不同来流条件下的多个典型翼型边界层的线性稳定性数据训练 Kriging 模型, 将基于代理模型的 e^N 方法成功地拓展到跨声速后掠翼边界层的转捩预测中。Pinna 等^[22]使用径向基函数 (radial basis function, RBF) 建立稳定性分析的代理模型, 该模型在尖锥边界层的转捩预测中得到了成功应用, 但转捩预测局限于马赫数 6 的流动情况。Zafar 等^[23]基于卷积神经网络 (convolutional neural network, CNN) 建立代理模型, 不同于 Crouch 等将基本流剖面直接作为 FCNN 输入, 采用 CNN 自动提取基本流剖面的特征信息, 模型最终准确预测了不可压二维翼型绕流的扰动放大因子以及转捩位置。特别地, 该工作发现 CNN 提取的特征量与边界层形状因子之间存在一一对应关系。Paredes 等^[17]将 CNN 用于可压缩 7° 半角钝锥边界层的转捩预测, 对转捩位置的预测与线性稳定性计算结果吻合较好。聂晗等^[24]基于 RBF 建立的代理模型准确预测了马赫数 0~6 平板边界层的扰动增长率, 并在误差允许的范围内, 成功预测低速和跨声速自然层流 (natural laminar flow, NLF) 机翼的转捩位置, 并进一步将代理模型应用于具有非自相似性边界层的钝锥流动稳定性分析中^[25]。

上述研究反映了通过机器学习技术建立代理模型简化 e^N 方法在求解线性稳定性问题中的可行性, 但存在以下局限性: (1) 转捩预测依赖于积分扰动增长率得到的 N 值曲线, 因此, 准确预测转捩要求代理模型对扰动增长率有较高的预测精度, 这种要求可能会导致代理模型复杂度增加、模型训练难度增大等问题; (2) 需要预先准备大量的训练样本, 这会耗费大量时间^[26]。正因如此, 有学者尝试将线性稳定性问题的物理模型引入到基于代理模型的失稳扰动特征值计算中。徐家宽等^[26] 尝试采用内嵌物理信息神经网络 (physics-informed neural network, PINN) 辅助线性稳定性分析, 但这种尝试是利用 PINN 来求解特征函数, 并没有将其直接用于线性稳定性方程的特征值求解中。聂晗等^[27] 采用另外一种思路: 基于 RBF 构造初值代理模型, 再由代理模型提供给定频率、展向波数对应的扰动增长率初值, 即迭代求解线性稳定性方程的初值, 之后结合初值、基本流等其他条件求解扰动增长率。这种思路在 e^N 方法预测转捩时的线性稳定性方程求解中存在一定局限性: 基于 e^N 方法对飞行器外流场进行转捩预测需要对给定的边界层进行线性稳定性分析, 但无法事先确定待计算的失稳扰动频率和展向波数。现有的代理模型方法可以给出迭代求解线性稳定方程特征值问题所需的初值, 但频率和展向波数依然要依赖经验选取, 或者在一定的频率-展向波数空间随机采样, 但这种做法效率较低。

为解决频率和展向波数选取困难的问题, 本文提出了一种基于神经网络的线性稳定性分析方法 (neural network-based linear stability analysis, NN-LSA), 采用神经网络提供频率、展向波数、流向波数和增长率的初值对, 再通过迭代法求解相应真实值。一方面, 对边界层进行线性稳定性分析无需事先给定频率和展向波数, 提高了分析效率。另一方面, 神经网络给出的初值与真实值差别较小, 线性稳定性计算便可快速收敛, 降低了对神经网络预测精度的要求, 同时也减少了对样本数量的需求。

1 方 法

1.1 LST

LST 是求解边界层线性稳定性特征的基本算法, 基本逻辑是将边界层的稳定性问题利用平行性假设将其简化为一个常微分方程特征值问题并求解, 并最终给出给定频率扰动的稳定性信息。其基本推导过程如下:

采用贴体正交曲线坐标系, 如图 1 所示, 其中 x_1 、

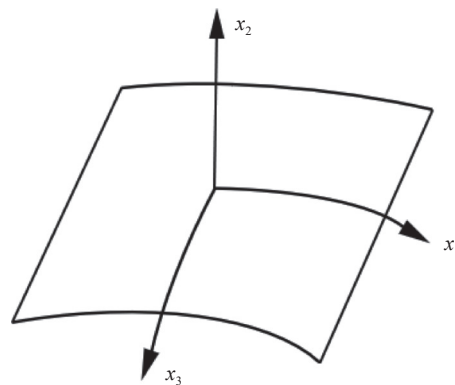


图 1 贴体正交曲线坐标系

Fig. 1 Body fitted orthogonal curvilinear coordinate system

x_2 、 x_3 分别表示势流方向、壁面法向以及垂直势流方向的坐标。 x_1 、 x_2 、 x_3 方向对应的拉梅系数分别为 $h_1 = 1 + k_1 x_2$ 、 $h_2 = 1$ 、 $h_3 = 1 + k_3 x_2$, 其中 k_1 、 k_3 分别表示 x_1 和 x_3 方向的曲率, 并将瞬时流场物理量分解为基本流和扰动量, 即:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}' \quad (1)$$

式中: $\mathbf{q} = [\rho, u, v, w, T]^T$, 分量分别表示密度、速度分量以及温度; 下标 “0” 表示基本流, 上标 “'” 表示扰动量。瞬时物理量和基本流均满足 N-S 方程, 将瞬时物理量 $\mathbf{q}$ 代入可压缩 N-S 方程, 并减去基本流满足的方程, 便可得到扰动满足的控制方程。基于小幅值扰动的假设, 扰动之间的非线性作用可以忽略; 基于局部平行流假设, 基本流的法向速度和流向的导数可以忽略。此时, 将扰动量写成行进波的形式:

$$\mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3, t) = \hat{\mathbf{q}}(x_2) e^{i(\alpha x_1 + \beta x_3 - \omega t)} + c.c. \quad (2)$$

其中, $\hat{\mathbf{q}}(x_2)$ 表示扰动形函数, α 、 β 分别为流向和展向波数, t 为时间, ω 为频率, $c.c.$ 表示共轭复数。将式 (2) 代入线化的扰动控制方程, 便可得到线性稳定性方程, 写成矩阵形式为:

$$\left(\mathbf{A} \frac{d^2}{dx_2^2} + \mathbf{B} \frac{d}{dx_2} + \mathbf{C} \right) \hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (3)$$

其中, $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 是 5×5 的矩阵, 矩阵元素是 ω 、 β 、 α 以及基本流的函数, 其具体形式可参考文献 [28]。

方程 (3) 的边界条件为:

$$x_2 = 0: \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{T} = 0 \quad (4)$$

$$x_2 \rightarrow \infty: \hat{\rho} = \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{T} = 0 \quad (5)$$

齐次方程 (3) 和齐次边界条件 (4、5) 构成特征值问题, 该问题描述扰动波色散关系 $\alpha = \alpha(\omega, \beta)$ 。考虑空间模式, 即扰动是沿空间增长或衰减的, 此时 ω 是

实数, α 和 β 都有可能是复数。在本文关心的边界层流动是二维的条件下, 扰动的展向波数 β 和频率 ω 均是实数。此时, 给定实数 ω 、 β , 可求解复数 α , 记 $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, $\sigma = -\alpha_i$ 表示扰动的流向增长率。

利用五点四阶中心差分格式对式(3)中关于 y 的一阶、二阶导数项离散, 之后可采用 QZ 方法^[29] 或迭代法^[30-31] 求解离散后的方程, 但在给定迭代初值的情况下, 通常选用迭代法求解。

1.2 NN-LSA

通过迭代法求解线性稳定性方程, 需给定迭代初值。对于基本流、扰动频率及展向波数已知的情况, 选取迭代初值常用的方法主要有两种。第一种是先使用 QR 或 QZ 方法直接求解全部的特征值, 以其中的不稳定波特征值 ($\sigma > 0$) 作为求解其他频率和展向波数不稳定波的迭代初值, 具体操作是对频率和波数做微小改变, 再使用迭代法计算参数对应的目标特征值。这种方法的问题在于直接求解本身计算量大且计算效率低。虽然 Chang 等^[32] 建议先直接求解相对简单的无黏稳定性方程获得失稳扰动特征值, 再以此为初值, 代入黏性稳定性方程迭代求解不稳定波, 但该做法的效率依然很低。另一种方法是在复平面 (α_r, α_i) 随机选取多个迭代初值, 并结合基本流、扰动频率及展向波数, 分别代入线性稳定性方程求解不稳定波。此时, 大部分迭代初值会使得迭代过程发散或迭代到非目标特征值, 只有少部分可以收敛到目标特征值, 所以该方法计算量仍然较大, 效率较低。此外, 上述两种方法均需要提前给定合适的 ω 和 β , 这对使用者的流动稳定性知识储备提出了一定的要求。使用者需要结合边界层分布的特征以及稳定性的基础知识, 对失稳扰动的频率和展向波数事先做出猜测, 如果无法对其做出有效猜测, 则需要在一个较大的频率-展向波数参数空间中逐点做迭代法试算, 并借此找到合适的目标特征值, 但这种做法会消耗大量的计算时间。

为解决 ω 、 β 选取困难的问题, 通过神经网络^[33] 给出最不稳定波参数 ($\omega, \beta, \alpha_r, \sigma_{\max}$) 的预测值。进一步地, 结合预测值和基本流, 利用迭代法获得相应真值, 然后通过改变 (ω, β) 来获取最不稳定波。该方法称为 NN-LSA, 其示意图如图 2 所示。基于该方法求解不稳定波, 只需给定基本流, 神经网络会给出相应的最不稳定波参数, 从而实现线性稳定性计算的自动进行。获取最不稳定波参数后, 以其为初值, 来求解其他频率、展向波数的不稳定波。

在 NN-LSA 方法的神经网络部分, 将基本流设置

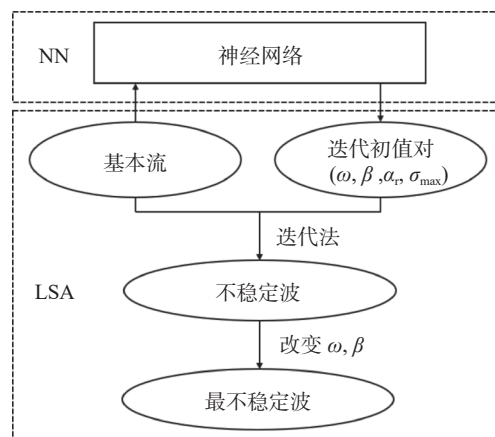


图 2 NN-LSA 示意图

Fig. 2 Schematic diagram of NN-LSA

为输入, 而将频率、展向波数、最不稳定扰动的流向波数及增长率设置为输出, 可以有效减轻后续迭代求解失稳扰动部分中获取初值的负担。同时, 使用神经网络直接给出迭代法所需的频率、展向波数、流向波数、增长率迭代初值对 ($\omega, \beta, \alpha_r, \sigma_{\max}$), 使得该方法可以很方便地应用于 e^N 方法的并行求解技术中, 分区域或者分进程同时高效地计算多个不稳定性分析问题, 从而有效提高后续转捩预测的效率。

该方法的线性稳定性分析部分, 优先求解最不稳定性波是出于以下考虑: 基于迭代法求解最不稳定性波比求解其他频率、展向波数的不稳定波, 特别是近似中性波的过程更容易收敛到目标特征值; 基于最不稳定性波逐渐向中性曲线上支过渡来求解其他不稳定性波的过程容易实现。而中性曲线上支附近的近似中性波由于其色散关系与边界层外的声波、熵波、涡波等扰动的色散关系较为接近, 如果直接选取近中性扰动波作为迭代初值, 则容易收敛到非目标特征值或导致迭代过程发散。

1.3 FCNN 和 CNN

NN-LSA 模型的神经网络部分采用 CNN。FCNN 是一种简单的神经网络, 由输入层、若干隐藏层和输出层组成。以包含一层隐藏层的 FCNN 为例(图 3)来说明输入、输出之间的映射关系。假设输入向量为 $\mathbf{x}$, 输出向量为 $\mathbf{y}$, 隐藏层对应的中间结果为向量 $\mathbf{z}$ 。其映射关系可以表示为:

$$\mathbf{z} = g[\mathbf{W}^1 \mathbf{x} + \mathbf{b}^1] \quad \mathbf{y} = \mathbf{W}^2 \mathbf{z} + \mathbf{b}^2 \quad (6)$$

其中: $\mathbf{W}^1$ 、 $\mathbf{W}^2$ 为权重矩阵, $\mathbf{b}^1$ 、 $\mathbf{b}^2$ 为偏置向量, g 为激活函数。随着隐藏层包含的神经元个数增多, 神经网络表示的函数关系会越来越复杂; 当隐藏层包含的神经元个数足够多时, FCNN 可以以任意的精度近似任意一个连续函数^[34]。

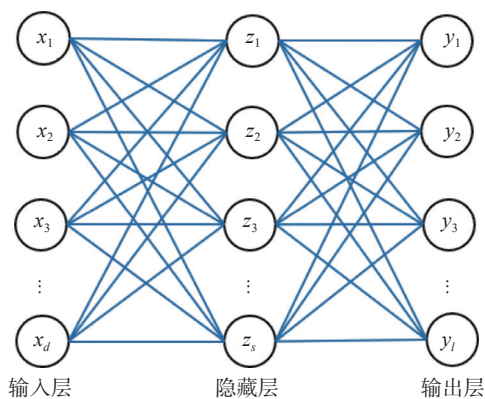


图3 包含一层隐藏层的全连接神经网络

Fig. 3 Framework of FCNN with one hidden layer

在 FCNN 中, 后一层的每个神经元都和前一层的所有神经元相连, 因此, 当每层的神经元个数很多时, 权重矩阵和偏置向量的可学习参数会非常多, 这会使得神经网络的训练效率降低。相比之下, CNN 采用一系列卷积层和池化层, 卷积层示意图如图 4 所示, 其中后一层每一个神经元只和前一层中的部分神经元相连, 形成局部连接网络, 使得卷积层和前一层之间的连接数大大减少, 这意味着可学习参数也相应减少。进一步, 不同神经元对应的局部连接网

络的可学习参数是相同的, 即图 4 中同颜色连线上的参数。池化层对输入进行下采样, 降低输入维度, 从而减少可学习参数的数量。卷积层的局部连接、参数共享的属性以及池化层针对输入量的下采样操作, 使得 CNN 相比于 FCNN 具有更高的训练效率^[35]。

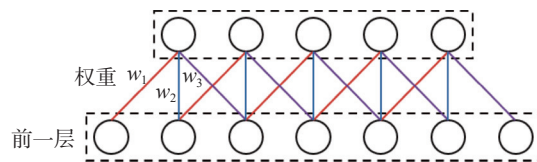


图4 卷积层示意图

Fig. 4 Schematic diagram of convolutional layer

除此之外, CNN 可以通过卷积层和池化层来提取有序数据的特征信息, 被广泛应用于计算机视觉、自然语言处理等领域^[36]。基本流剖面可看作是一种有序数组, 因此, 有学者将 CNN 用于处理流场数据, 在流场预测方面得到了成功应用^[37-38]。本文采用的神经网络结构如图 5 所示。该网络通过卷积层和池化层提取基本流剖面的特征信息, 并将提取的特征量和流动参数通过全连接层非线性地映射为相应的最不稳定波参数。

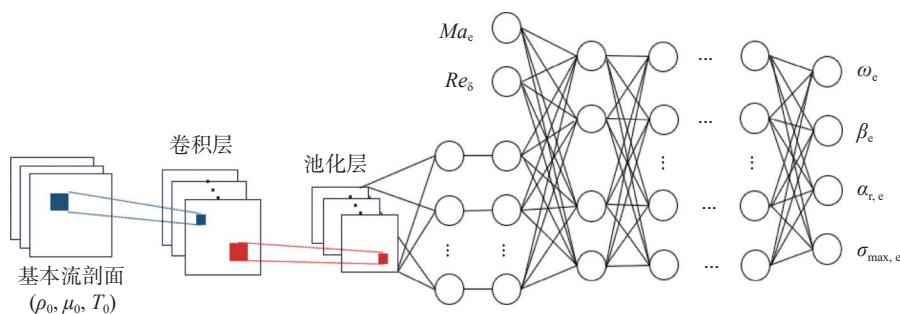


图5 本文神经网络结构图

Fig. 5 Schematic architecture of the neural network in this paper

基本流剖面包括密度剖面 ρ_0 、速度剖面 u_0 和温度剖面 T_0 , 各剖面采用边界层内 61 个等间距位置的密度、速度和温度来分别表示。输入剖面使用边界层外缘相应物理量进行归一化, 长度使用边界层名义厚度 δ 归一化。流动参数包括边界层外缘马赫数 Ma_e 和雷诺数 $Re_\delta = \rho_e u_e \delta / \mu_e$, 输出的最不稳定波参数包括扰动频率 $\omega_e = \omega \delta / u_e$ 、展向波数 $\beta_e = \beta \delta$ 、流向波数 $\alpha_{r,e} = \alpha_r \delta$ 和扰动增长率 $\sigma_{\max,e} = \sigma_{\max} \delta$, 带下标“e”表示边界层外缘物理量, 其中, $\sigma_{\max} = \max_{\omega, \beta} [\sigma(\omega, \beta)]$ 。

对于可压缩边界层流动, 当马赫数较小时 ($Ma_e < 2.2$), 边界层中只存在第一模态, 当马赫数增大时, 边界层中会出现高阶模态(如第二模态等)。对于二维超声速边界层, 第一模态的最不稳定扰动是三

维的, 而第二模态最不稳定扰动是二维的。从物理机制上来说, 高阶模态扰动主要和无黏方程的无黏拐点失稳理论有关, 而第一模态的情况则较为复杂, 通常认为其下支附近依赖于黏性作用, 而上支附近则依赖于无黏拐点失稳理论。二者虽然都是线性稳定性方程的解, 但其本质是不相同的。而且在大多数情况下, 第一模态和第二模态并不相连, 导致基于其中一个模态的不稳定波参数很难利用迭代法通过改变参数过渡求解另一个模态的不稳定波。鉴于以上原因, 本文构造两个神经网络分别用于给出第一模态和第二模态最不稳定波参数。为便于后文区分, 用于给定第一模态最不稳定波参数的神经网络记作 NN1, 用于给定第二模态最不稳定波参数的神经网络记作 NN2。

2 数据集和神经网络优化

2.1 数据集生成

通过对二维可压缩边界层流动进行线性稳定性分析,即分别通过求解边界层方程和线性稳定性方程得到用于训练神经网络的样本数据,其中包括基本流和最不稳定波参数。

对二维可压缩 N-S 方程中的各项进行量级分析,忽略较小量,便可得到边界层方程:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (9)$$

其中: c_p 表示定压比热容, μ 、 κ 分别表示动力学黏性系数和热传导系数,遵从 Sutherland 公式。

边界条件: 壁面处, 速度无滑移, $u = v = 0$; 若为等温壁, 则 $T = T_w$, 若为绝热壁, 则 $T' = 0$, $\partial T / \partial y = 0$; 无穷远处, $u = u_e$, $T = T_e$ 。为求解边界层方程的相似性解, 引入 Illingworth 变换:

$$\begin{aligned} \xi(x_0) &= \int_0^{x_0} \rho_e(x) \mu_e(x) u_e(x) dx \\ \eta(x, y_0) &= \frac{u_e(x)}{\sqrt{2\xi(x)}} \int_0^{y_0} \rho(x, y) dy \end{aligned} \quad (10)$$

流函数定义为:

$$\psi(x, y) = \sqrt{2\xi(x)} f(\eta(x, y)) \quad (11)$$

根据流函数与速度分量的关系 $\partial\psi/\partial y = \rho u$ 、 $\partial\psi/\partial x = -\rho v$, 则速度 u 为:

$$u = u_e f'(\eta) \quad (12)$$

考虑将总焓 h 写成以下形式^[39]:

$$h = h_e Q(\eta) \quad (13)$$

$Q(\eta)$ 表示相似性解, 结合 x 方向动量方程(8)和能量方程(9)可得用总焓表示的能量方程:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \\ &\frac{Pr-1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

其中 Pr 表示普朗特数, 本文 $Pr = 0.72$ 。将式(10)和式(12、13)代入动量方程(8)和能量方程(14), 可得相似性方程:

$$(Cf'')' + ff''' + \Lambda \left(\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2 \right) = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_e^2 \right) \left[\left(\frac{C}{Pr} Q' \right)' + fQ' \right] + \\ \frac{Pr-1}{Pr} (\gamma-1) Ma_e^2 (Cf'f'')' = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $C = \frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}$; $\Lambda = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}$; γ 为比热比; 本文中 $\gamma = 1.4$; $\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_e^2 \right) Q - \frac{\gamma-1}{2} Ma_e^2 f'^2$ 。
方程的边界条件:

$$\eta = 0: f = f' = 0, Q = Q_w \text{ (或 } Q' = 0) \quad (17)$$

$$\eta \rightarrow \infty: f' = Q = 1 \quad (18)$$

假定势流速度分布形式满足 $u_e = (1+x)^m$, 参数 m 可表征压力梯度的方向和强度: $m > 0$, 流场中存在沿流向的顺压梯度, 势流速度增加; $m < 0$, 流场中存在沿流向的逆压梯度, 势流速度减小; 特别地, $m = 0$, 流场中不存在压力梯度, 此时, 边界层流动对应可压缩形式的 Blasius 解^[40]。本文考虑不同飞行工况下的边界层流动, 自由流条件包括飞行高度 H 、来流马赫数 Ma_∞ 、壁面温度 T_w 和参数 m 。各条件参数的分布范围和工况数如表 1 所示。其中, T_{ad} 对应绝热壁面温度。给定自由流条件后, 采用打靶法求解上述相似性方程, 获得相应的基本流。

表 1 自由流条件及其分布范围

Table 1 Freestream conditions and distribution range

条件参数	下界	上界	工况数
H/km	20	40	3
Ma_∞	2	8	5
T_w/K	300	T_{ad}	6
m	-0.01	0.02	4

针对上述 360 个工况下的边界层流动开展流动稳定性分析(通过天津大学黄章峰开发的转捩预测软件 FIT^[11-12] 完成), 得到不同模态对应的最不稳定波, 进而得到用于训练网络模型的数据集, 共 48 184 个数据样本。其中, 第一模态和第二模态对应的数据样本量分别为 23 679 和 24 505。每个样本参数包括基本流剖面 ρ_0 、 u_0 、 T_0 、流动参数 Ma_e 、 Re_δ 以及不同模态对应的最不稳定波参数 ω_e 、 β_e 、 $\alpha_{r,e}$ 、 $\sigma_{\max,e}$ 。

2.2 神经网络优化

神经网络优化是指基于优化算法, 不断调整神经

网络的权重参数,使得预测值和真实值之间的误差(或损失函数)逐渐收敛。本文选用的优化算法为Adam算法^[41],选择均方误差 E_{MS} 作为损失函数,其定义如下:

$$E_{MS} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^4 (y_{l,pred}^j - y_{l,truth}^j)^2 \quad (19)$$

其中: n 表示样本总数,上标 j 表示第 j 个样本, $y_l(l=1, 2, 3, 4)$ 分别表示 ω_e 、 β_e 、 α_{re} 、 $\sigma_{max,e}$, $y_{l,pred}$ 和 $y_{l,truth}$ 分别表示输出参数的预测值和计算真实值。

在神经网络中添加激活函数有助于增强网络的表示能力和学习能力。目前有多种非线性的激活函数可供选择,例如sigmoid函数^[42]、线性整流函数^[43] $\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$ 等。相比于sigmoid函数的两端饱和,ReLU函数为左饱和函数,在 $x > 0$ 时导数为1,这在一定程度上缓解了神经网络优化过程中梯度消失的问题,从而加速损失函数的收敛。但使用ReLU函数可能会出现“死亡ReLU”问题,导致相应的神经网络权重无法更新。Leaky ReLU函数^[44]是ReLU函数的一个变体,在 $x < 0$ 时具有很小的梯度 λ ,从而避免了“死亡ReLU”问题的发生。因此,本文采用LeakyReLU激活函数来确保神经网络权重参数的更新,并取 $\lambda = 0.001$ 。

$$\text{Leaky ReLU}(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ \lambda x, & x \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

在神经网络中,除了可学习的权重参数外,超参数对网络的性能有很大影响。对于本文研究的神经网络(图5),超参数主要包括:卷积层层数、每层卷积层包含的通道数、全连接层层数、每层全连接层包含的神经元个数。每个卷积层后会有池化层,所以池化层层数跟卷积层层数相同。分别使用数据集中第一模态和第二模态的样本训练NN1和NN2,根据多次训练结果,NN1和NN2最终选定的超参数如表2所示,表中 C_H 表示卷积层包含的通道数, N_L 表示全连接层包含的神经元个数。可见,NN1和NN2的第一层全连接层均有(2+4)个神经元,前2个神经元对应流动参数 Ma_e 、 Re_δ ,后4个神经元对应基本流剖面经卷积层和池化层处理后得到的特征参数。

根据选定的超参数训练NN1和NN2,训练过程

表2 神经网络超参数

Table 2 Hyperparameters of neural network

NN	网络结构	权重参数
NN1	C_H : [3, 4, 4] + N_L : [2+4, 64, 64, 4]	4 960
NN2	C_H : [3, 4, 4] + N_L : [2+4, 64, 32, 4]	2 752

中,损失函数随着训练次数的变化如图6所示。从图中可看到,NN1和NN2的损失函数均随训练次数的增加而逐渐变小,最后收敛到 10^{-2} 以下。本文神经网络的搭建以及训练均通过Pytorch^[45]框架完成。由于依靠LSA的物理模型可以对不够精确的迭代初值进行有效修正,不需要保证神经网络模型有更高的收敛精度,因此将经过3 000次训练的NN1和NN2作为最终的预测模型。

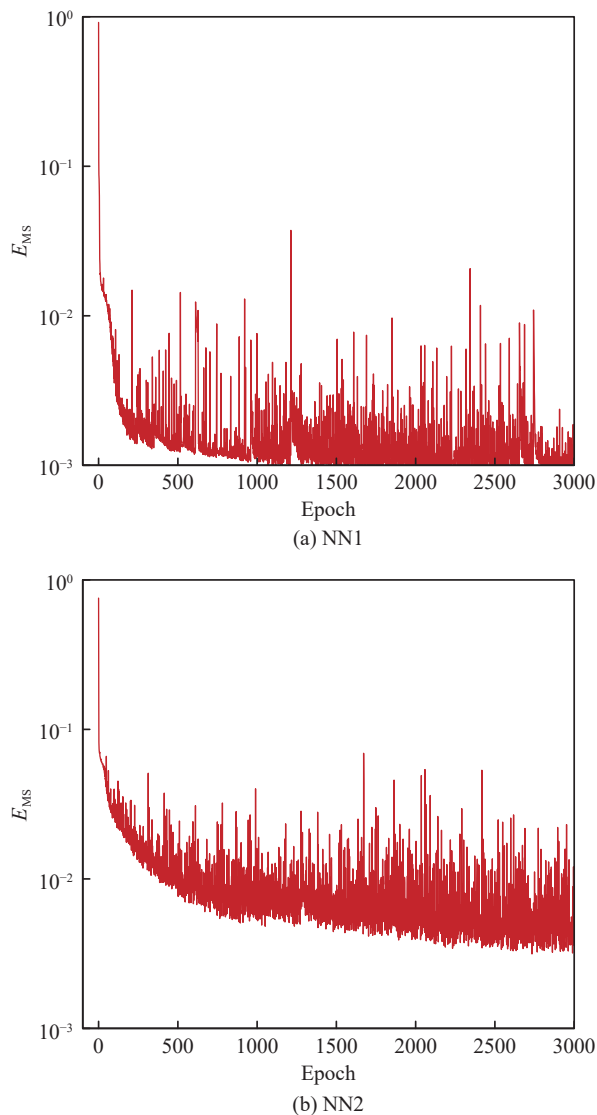


图6 NN1和NN2的训练过程

Fig. 6 Training process of NN1 and NN2

3 结果分析与验证

选用不同自由流条件下的平板边界层和尖锥边界层的线性稳定性分析结果作为测试算例,来验证基于NN-LSA求解最不稳定波特特征值的可行性和高效性。为此,选取的对比标准如下:在参数空间 $(\omega, \beta, \alpha_r, \alpha_i)$ 中随机选取迭代初值,结合基本流,代入

线性稳定性方程求解不稳定波，再根据求解出的不稳定波找到最不稳定波，记该方法为全局搜索法(global search, GS)。以下讨论如无特殊说明，选取 $L^* = 1\text{ m}$ 对长度无量纲化，选取 u_∞^*/L^* 对频率 ω 无量纲化，选取 $1/L^*$ 对 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 无量纲化，下标“ ∞ ”表示自由来流物理量。

3.1 平板算例

平板算例的自由流条件如表 3 所示，从表中可以看到，算例选取考虑了马赫数、飞行高度以及壁面温度的变化。特别地，Case 1 为内插算例，Case 2 和 Case 3 对于 Ma_∞ 来说是外推算例。表中 $T_w = 299\text{ K}$ 和 3627 K 对应绝热壁面温度。

表 3 平板算例的自由流条件
Table 3 Freestream conditions of flat plate cases

Test Case	H/km	Ma_∞	T_w/K	m
Case 1	30	5	800	0
Case 2	20	1.5	299	0
Case 3	40	9	3627	0

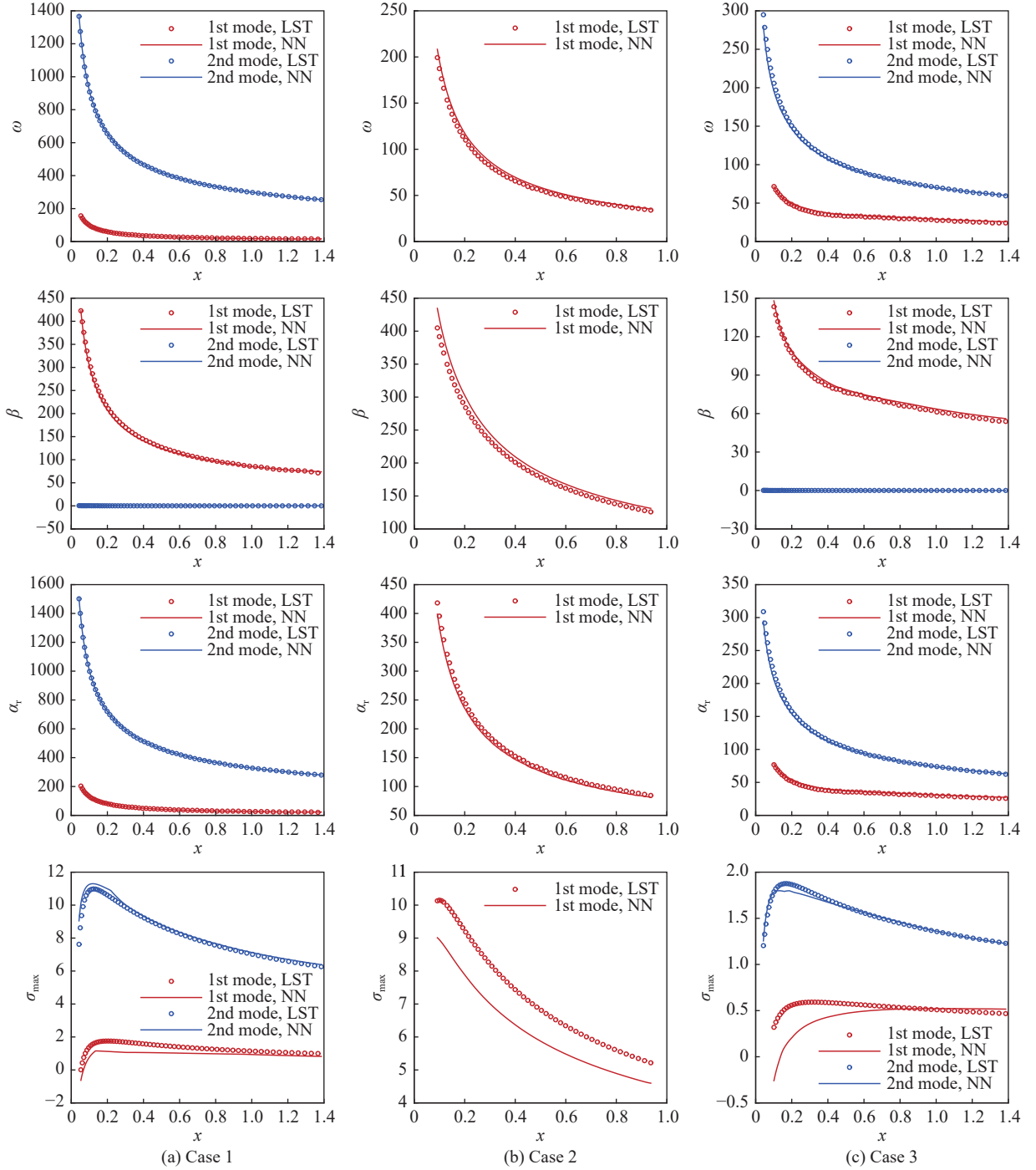
基于 NN-LSA 能够成功求解最不稳定波有两个关键点：(1)神经网络模型对 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 的预测精度足够，这才能使得 LSA 部分中迭代顺利收敛到目标特征值；(2)在 LSA 部分中，以神经网络模型提供的 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 为初值，能够通过迭代法找到最不稳定波。图 7 展示了对第一模态(1st mode)和第二模态(2nd mode)的最不稳定波参数 ω 、 β 、 α_r 和 $\sigma_{\max}$ 的神经网络预测结果和 LST 计算结果的对比。对于 Case 1(图 7(a))，NN 对 ω 、 β 、 α_r 的预测结果和 LST 吻合得很好，相比之下，对 $\sigma_{\max}$ 的预测结果与 LST 存在一定误差。图 7(b、c)分别展示了 NN 和 LST 对外推算例(Case 2、Case 3)的结果对比，相比于内插算例 Case 1，NN 对 4 个参数的预测结果与 LST 的吻合度略差，这是因为神经网络可看作一个非线性的对内插值工具，通常情况下，神经网络对内插算例的预测效果要优于外推算例。

经过测试，在 LSA 部分中，3 个测试算例均能够以神经网络模型预测的 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 为初值，并通过迭代法找到最不稳定波，表明本文提出的 NN-LSA 在内插和外推测试中均具有良好的适用性。限于篇幅，仅以 NN 对 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 的预测精度相对较差的 Case 2 为例进行展示说明。图 8 展示了 NN-LSA 对 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 的预测结果和 LST 的对比，从图中可看出，两种方法的预测结果几乎完全吻合。由此可见，即使 $\sigma_{\max}$ 预测值和真实值之间存在较大差

距，但仍能以 NN 的预测值为初值，通过迭代法成功找到最不稳定波。这是因为增长率相对于频率和波数来说是小量，尽管增长率的预测值与 LST 存在一定差异，但在求解线性稳定性问题的过程中，决定是否迭代收敛到目标特征值的主要因素是对频率和波数的估计结果，在对频率和波数都预测准确的前提下，增长率预测的准确性对收敛结果的影响很小。NN-LSA 的优势正是根据 NN 直接给出了失稳扰动波频率和波数的较好估计，从而代替了传统方法中依赖经验的做法。

除了关注神经网络预测 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 的准确性，本文更加关心基于 NN-LSA 求解最不稳定波的效率。针对每一个测试算例，采用系统抽样的方法抽取 40 个不同站位的基本流剖面，分别计算采用 NN-LSA 和 GS 方法求解相应的最不稳定波特征值所需时间的平均值。基于 GS 方法求解最不稳定波的计算量大，因此，采用 64 核 CPU 并行来测试计算时间。经过测试，基于 NN-LSA 求解最不稳定波的时间较短，故采用单核 CPU 测试计算时间。需要注意的是，基于 NN-LSA 求解最不稳定波，分为两个步骤：(1)由神经网络模型给出最不稳定波参数 ω 、 β 、 α_r 和 $\sigma_{\max}$ 的预测值；(2)以预测值为初值，通过迭代法获取最不稳定波。测试表明，完成步骤(1)的时间相比完成步骤(2)的时间是小量，这说明在 NN-LSA 中，一旦 NN 训练完毕，对参数的预测时间几乎可以忽略不计。

表 4 展示了两种方法对 3 个测试算例的测试时间。从表中可以看出，基于 GS 方法计算最不稳定波特征值的时间大于 NN-LSA，需要说明的是，表中 GS 方法的时间是在 64 核 CPU 并行的条件下统计的计算时间，若换成单核运算，则 GS 方法的计算时间会比 NN-LSA 大得多，这是由于在 GS 方法中，需要在大量的频率-展向波数的参数组合中一一尝试求解特征值问题来搜索不稳定扰动波，且在每个参数组合中都需基于迭代法通过多次改变特征值初值来求解线性稳定性方程，这会花费大量的计算时间。而 NN-LSA 可以依靠神经网络直接给出最不稳定波或其附近的频率-展向波数的参数组合，这极大地减少了 GS 方法中对应步骤所需消耗的时间，从而使得 NN-LSA 的计算效率大大提高。然而，对于计算经验丰富的工程师可以直接依靠个人经验划定较小的频率-展向波数参数组合范围来减少 GS 方法的搜索时间，但这无疑增加了计算过程中的人为因素和经验性。相比之下，NN-LSA 使用 NN 代替了人为因素来确定扰动波参数组合，且效率更高。

图 7 NN 和 LST 对平板算例 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 预测结果的对比Fig. 7 Comparison of ω , β , α_r and $\sigma_{\max}$ predicted by NN-LSA and LST for flat plate

此外,从表 4 中还可以看出,在 NN-LSA 计算过程中,Case 1 所需时间比 Case 3 少,这是因为 Case 1 中神经网络给出的初值与真实值差别更小,因此,通过迭代方法获得最不穩定波所需时间也更少;Case 2 所需时间比 Case 3 少,这是因为 Case 2 只包含第一模态,而 Case 3 包含第一模态和第二模态。

压力梯度对于二维平板边界层的流动稳定性有着重要的影响^[46]。接下来将利用沿流向存在压力梯

度的边界层流动的线性稳定性分析对 NN-LSA 作进一步测试。自由来流条件为 $H = 30 \text{ km}$, $Ma_\infty = 4.5$, 壁面绝热。假定势流速度 $u_e = 0.01x + 1$, 此时,边界层中沿流向存在顺压梯度。图 9 展示了存在压力梯度时,NN 对 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 的预测值和 LST 结果的对比。从图中可看出,NN 对 ω 、 β 、 α_r 的预测值与 LST 结果吻合得很好,而 $\sigma_{\max}$ 的预测值和 LST 存在一定误差,该规律与无压力梯度情况下一致。为更好地说

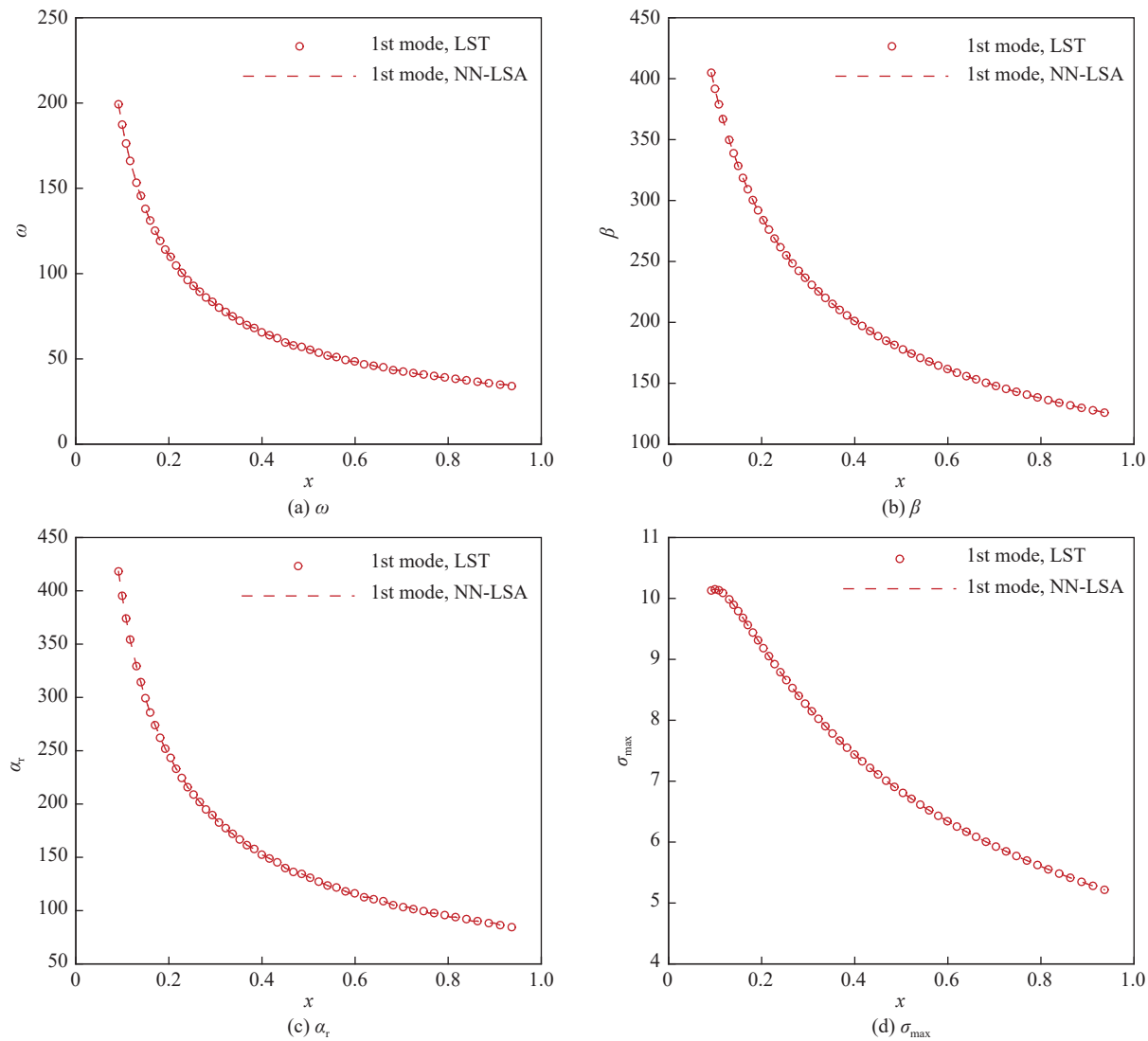


图 8 NN-LSA 和 LST 对 Case 2 的 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 预测结果对比

Fig. 8 Comparison of ω , β , α_r and $\sigma_{\max}$ for Case 2 predicted by NN-LSA and LST

表 4 使用 GS 和 NN-LSA 方法计算 40 个站位的 最不稳定波所需时间的平均值		
Table 4 The average time required by GS and NN-LSA for calculating the most unstable waves at 40 stations		
Test Case	<i>t</i> /s	
	GS	NN-LSA
Case 1	32.451	0.684
Case 2	48.979	0.994
Case 3	42.278	2.124

明将 NN 的预测值作为初值，通过迭代法能够获得相应最不稳定波，比较了 NN-LSA 和 LST 对 $\sigma_{\max}$ 的预测结果，如图 10 所示。从图中可以看到 NN-LSA 和 LST 结果完全吻合，其原因在上文已经讨论，此处不再赘述。另外，经过测试，基于 GS 方法和 NN-LSA 求解最不稳定波的时间分别为 31.646 s 和 0.677 s。以上

结果表明 NN-LSA 可用于求解存在压力梯度的边界层中的最不稳定波，具有一定的泛化性，且求解效率比 GS 方法高。

3.2 尖锥算例

为进一步验证 NN-LSA 方法的泛化能力，本节选取 7°半角尖锥模型的最不稳定波数据对 NN-LSA 进行测试。尖锥模型头部半径为 0.05 mm，长度为 0.8 m，计算工况参考文献 [47]，具体参数设置见表 5。

计算基本流时，零攻角的超声速流体流过尖锥模型的边界层问题属于二维轴对称问题，因此，可以只求一个子午面的流动情况，并假设尖锥不旋转，则周向速度为零。对于计算网格，流向和法向均采用渐变网格，网格数分别为 701、351，在头部和壁面处较密，网格量约为 24 万，如图 11 所示。为清楚展示，已对网格做稀疏处理。在所考虑的工况下，尖锥边界层

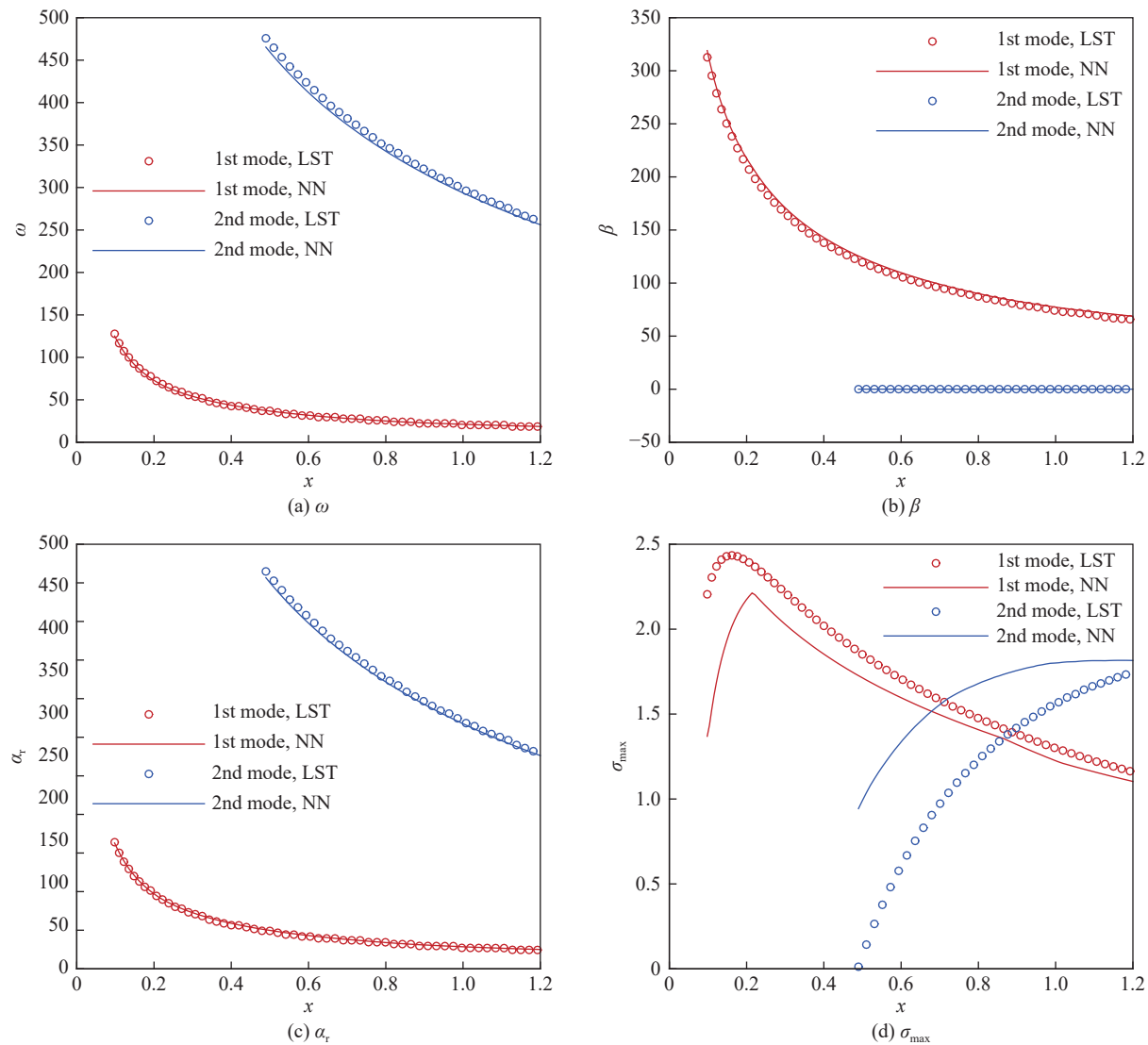


图 9 存在压力梯度时, NN 和 LST 对 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 预测结果的对比

Fig. 9 Comparison of ω , β , α_r and $\sigma_{\max}$ predicted by NN and LST when existing pressure gradient

表 5 尖锥计算工况

Table 5 Computation parameters of sharp cone

Ma_∞	$T_{\text{total}} / \text{K}$	$Re / (10^6 \text{m}^{-1})$	$\text{AoA} / (^\circ)$	T_w / K
4.93	442	9.1	0	303

注: T_{total} 表示总温, Re 表示单位雷诺数, AoA 表示攻角。

中同样存在第一模态和第二模态不稳定波。

图 12 展示了对于尖锥算例的最不稳定波参数 ω 、 β 、 α_r 和 $\sigma_{\max}$, NN 的预测结果和 LST 计算结果对比。从图中可以看出, NN 对 ω 、 β 、 α_r 的预测效果也较好, 对 $\sigma_{\max}$ 的预测效果较差。这是因为在远离头部的位置, 如果以边界层名义厚度作为参考长度, 尖锥沿母线方向的曲率为零, 展向曲率为小量, 这时从线性稳定性方程来看, 曲率项对扰动波的频率、展向波数以及流向波数的影响较小, 使得基于无曲率的平板边界层的稳定性数据训练的神经网络模型能够以较

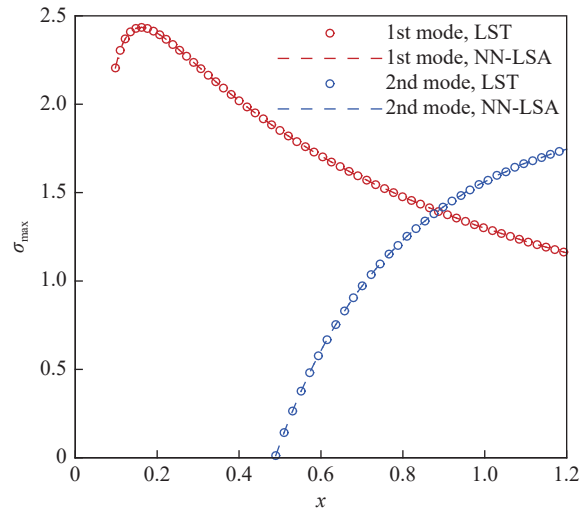


图 10 存在压力梯度时, NN-LSA 和 LST 对 $\sigma_{\max}$ 预测结果的对比

Fig. 10 Comparison of $\sigma_{\max}$ predicted by NN-LSA and LST when existing pressure gradient

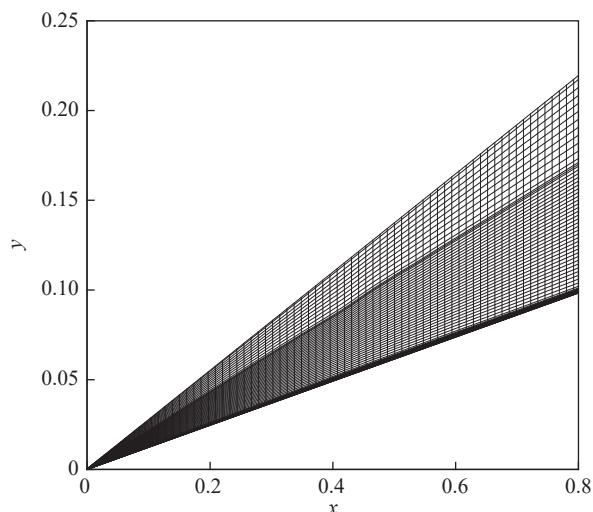
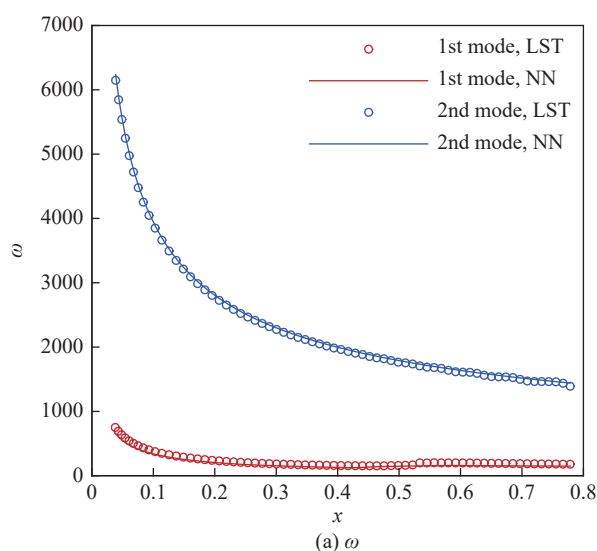
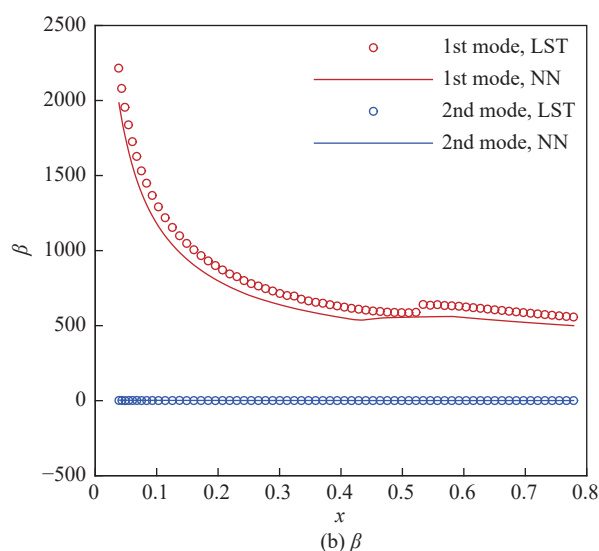
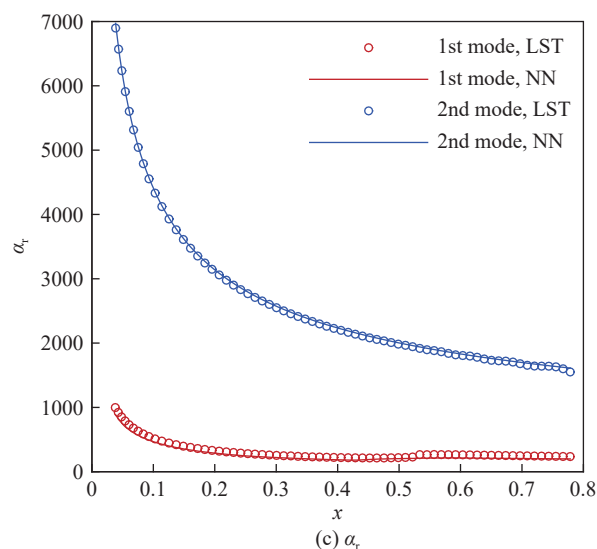
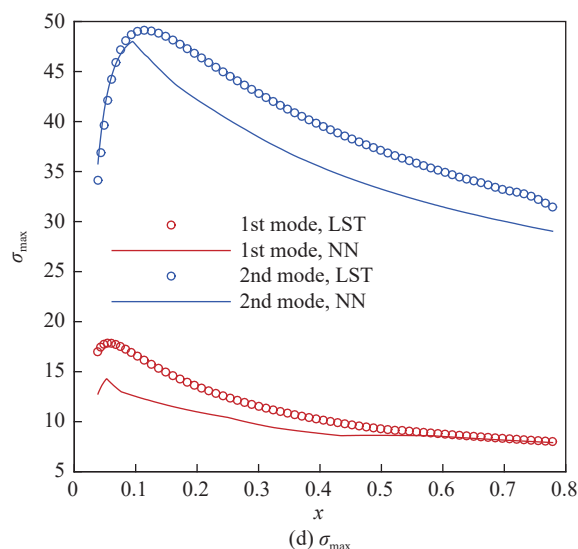


图 11 尖锥计算网格

Fig. 11 Computational mesh of sharp cone

高的精度预测零攻角尖锥边界层中最不稳定波的频率和波数。扰动增长率对于频率和波数来说是小量，曲率项会对增长率产生较大的影响，此时神经网络模型对扰动增长率的预测精度较差，需要进一步通过迭代法进行修正。

图 13 比较了 NN-LSA 和 LST 对 β 、 $\sigma_{\max}$ 的预测结果，可以看出，两者的结果几乎完全吻合，这表明 NN 对频率以及波数的预测精度是满足 LSA 迭代收敛要求的。因此，在 NN 对 ω 、 β 、 α_r 预测较准确，而对 $\sigma_{\max}$ 的预测效果较差的情况下，LSA 仍能基于 NN 提供的初值将迭代收敛到目标特征值。因此，基于平板边界层稳定性数据训练的神经网络，仍然能够以较高的精度预测尖锥边界层的最不稳定波参数。更重要的是，在 LSA 部分中，能够通过迭代法对神经网络预测的初值参数对进行修正，进而获得最不稳定

(a) ω (b) β (c) α_r (d) $\sigma_{\max}$ 图 12 NN 和 LST 对尖锥算例 ω 、 β 、 α_r 、 $\sigma_{\max}$ 预测结果的对比Fig. 12 Comparisons of ω , β , α_r and $\sigma_{\max}$ predicted by NN-LSA and LST for sharp cone

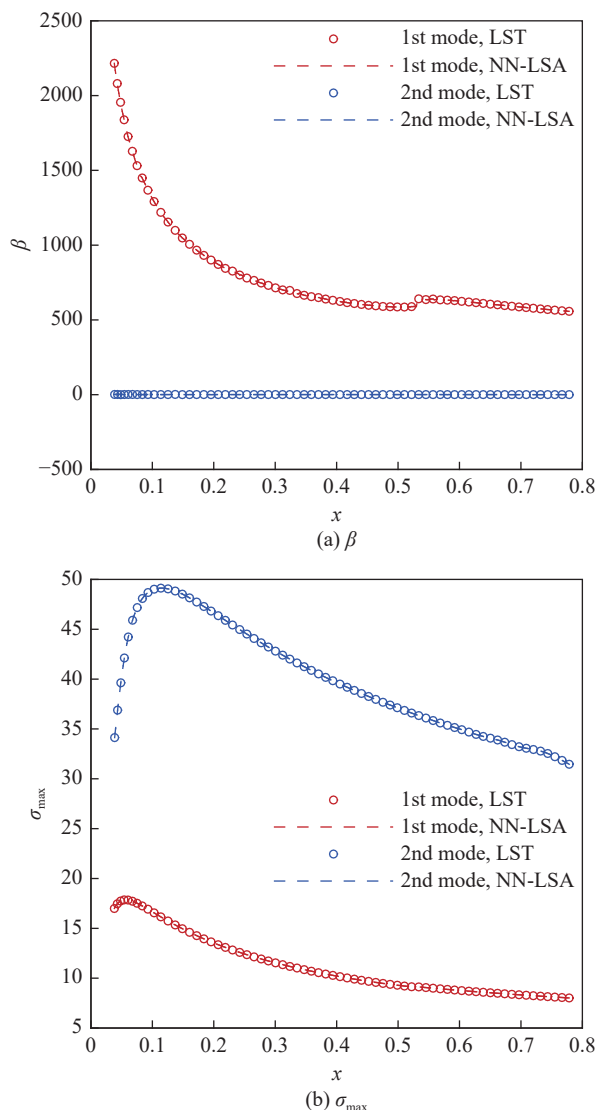


图13 NN-LSA和LST对尖锥算例的 β 、 $\sigma_{\max}$ 预测结果对比

Fig. 13 Comparisons of β and $\sigma_{\max}$ predicted by NN-LSA and LST for sharp cone

波真值。虽然数据集中只包含了平板边界层稳定性数据,但训练得到的NN模型仍能用于零攻角尖锥边界层的稳定性分析。此外,在计算效率方面,对比了GS方法和NN-LSA方法在获得40个不同站位的最不稳定波所需时间的平均值,结果表明:GS方法所需时间为33.692 s,NN-LSA所需时间为1.656 s,说明NN-LSA的计算效率更高,更具工程实用性。

4 结 论

本文基于平板边界层稳定性数据,提出了基于神经网络的线性稳定性分析方法(NN-LSA),用于求解线性稳定性问题,得到主要结论如下:

1) NN-LSA方法中,神经网络部分采用CNN建立模型,对频率和波数的预测值与真实值吻合较好,

能满足LSA部分迭代求解线性稳定性问题收敛的精度要求。且LSA部分对神经网络预测精度的要求不高,减小了模型训练对样本数量的依赖。

2) 计算效率方面,NN-LSA方法通过神经网络直接给出了最不稳定波频率和波数的较好估计,避免了GS方法通过“撒网”来搜索求解的耗时做法,使得NN-LSA方法求解边界层最不稳定波参数的效率要远高于GS方法。并通过平板算例和尖锥算例进行了验证,NN-LSA方法花费的时间比GS方法约低20~50倍。

综上所述,NN-LSA方法不仅能够自动分析边界层流动的线性稳定性,还在计算效率方面表现出显著优势,具有较高的工程应用潜力。该方法通过结合神经网络的高效预测能力和传统LSA方法的精确迭代求解能力,为边界层稳定性分析提供了一种新的高效解决方案。

参 考 文 献:

- [1] 杨武兵,沈清,朱德华,等.高超声速边界层转捩研究现状与趋势[J].空气动力学学报,2018,36(2):183-195.
YANG W B, SHEN Q, ZHU D H, et al. Tendency and current status of hypersonic boundary layer transition[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2018, 36(2): 183-195(in Chinese).
doi: 10.7638/kqdlxxb-2018.0011
- [2] 安复兴,李磊,苏伟,等.高超声速飞行器气动设计中的若干关键问题[J].中国科学(物理学 力学 天文学),2021,51(10):2-21.
AN F X, LI L, SU W, et al. Key issues in hypersonic vehicle aerodynamic design[J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2021, 51(10): 2-21(in Chinese).
doi: 10.1360/SSPMA-2021-0135
- [3] 周玲,阎超,郝子辉,等.转捩模式与转捩准则预测高超声速边界层流动[J].航空学报,2016,37(4):1092-1102.
ZHOU L, YAN C, HAO Z H, et al. Transition model and transition criteria for hypersonic boundary layer flow[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(4): 1092-1102(in Chinese).
doi: 10.7527/S1000-6893.2015.0237
- [4] ARNAL D, CASALIS G, HOUEVILLE R. Practical transition prediction methods: Subsonic and transonic flows[C]//RTO-EN-AVT-151 — Advances in Laminar-Turbulent Transition Modelling, Rhode St. Genèse, Belgium, 2008.
- [5] 符松,王亮.湍流转捩模式研究进展[J].力学进展,2007,37(3):409-416.
FU S, WANG L. Progress in turbulence/transition modelling[J]. Advances in Mechanics, 2007, 37(3): 409-416(in Chinese).
doi: 10.3321/j.issn:1000-0992.2007.03.008
- [6] XIANG X H, CHEN J Q, YUAN X X, et al. Cross-flow transition model predictions of hypersonic transition research vehicle[J]. Aerospace Science and Technology, 2022, 122: 107327.
doi: 10.1016/j.ast.2022.107327
- [7] MACK L M. Boundary-layer linear stability theory[R]. NASA, 1984.
<https://ntrs.nasa.gov/citations/19840025688>
- [8] MALIK M, MALIK M. Boundary-layer transition prediction toolkit[C]//28th Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, CO, USA. Reston,

- Virginia: AIAA, 1997.
doi: [10.2514/6.1997-1904](https://doi.org/10.2514/6.1997-1904)
- [9] CHANG C L. The langley stability and transition analysis codes (LASTRAC): LST, linear & nonlinear PSE for 2D, axisymmetric, and infinite swept wing boundary layers[C]//41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada. Reston, Virginia: AIAA, 2003.
doi: [10.2514/6.2003-974](https://doi.org/10.2514/6.2003-974)
- [10] 万兵兵, 陈曦, 陈坚强, 等. 三维边界层转换预测 HyTEN 软件在高超声速典型标模中的应用[J]. 空天技术, 2023(1): 150–158.
WAN B B, CHEN X, CHEN J Q, et al. Applications of HyTEN software for predicting three-dimensional boundary-layer transition in typical hypersonic models[J]. Aerospace Technology, 2023(1): 150–158(in Chinese).
doi: [10.16338/j.issn.2097-0714.20220206](https://doi.org/10.16338/j.issn.2097-0714.20220206)
- [11] 黄章峰, 肖凌晨, 罗纪生. 超声速边界层转换预测 e^N 方法及其软件开发[J]. 空气动力学学报, 2018, 36(2): 279–285.
HUANG Z F, XIAO L C, LUO J S. Transition prediction e^N method and its software development for supersonic boundary layers[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2018, 36(2): 279–285(in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2018.0023](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0023)
- [12] 黄章峰, 张宇琦. 高超声速三维边界层转换数值研究进展及预测软件[J]. 空气动力学学报, 2023, 41(11): 1–19.
HUANG Z F, ZHANG Y Q. Numerical research progress and prediction software of transition in hypersonic three-dimensional boundary layer[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2023, 41(11): 1–19(in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2023.0014](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2023.0014)
- [13] DRELA M, GILES M B. Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils[J]. AIAA Journal, 1987, 25(10): 1347–1355.
doi: [10.2514/3.9789](https://doi.org/10.2514/3.9789)
- [14] DRELA M. Two-dimensional transonic aerodynamic design and analysis using the Euler equations[D]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1986.
- [15] KRUMBEIN A. e^N transition prediction for 3D wing configurations using database methods and a local, linear stability code[J]. Aerospace Science and Technology, 2008, 12(8): 592–598.
doi: [10.1016/j.ast.2008.01.005](https://doi.org/10.1016/j.ast.2008.01.005)
- [16] BÉGOU G, DENIAU H, VERMEERSCH O, et al. Database approach for laminar-turbulent transition prediction: Navier–Stokes compatible reformulation[J]. AIAA Journal, 2017, 55(11): 3648–3660.
doi: [10.2514/1.j056018](https://doi.org/10.2514/1.j056018)
- [17] PAREDES P, VENKATACHARI B, CHOUDHARI M M, et al. Toward a practical method for hypersonic transition prediction based on stability correlations[J]. AIAA Journal, 2020, 58(10): 4475–4484.
doi: [10.2514/1.j059407](https://doi.org/10.2514/1.j059407)
- [18] 唐志共, 朱林阳, 向星皓, 等. 智能空气动力学若干研究进展及展望[J]. 空气动力学学报, 2023, 41(7): 1–35.
TANG Z G, ZHU L Y, XIANG X H, et al. Some research progress and prospect of Intelligent Aerodynamics[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2023, 41(7): 1–35(in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2023.0128](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2023.0128)
- [19] FULLER R, SAUNDERS W, VANDSBURGER U, et al. Neural network estimation of disturbance growth using a linear stability numerical model[C]//35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, USA. Reston, Virginia: AIAA, 1997.
DOI: [10.2514/6.1997-559](https://doi.org/10.2514/6.1997-559)
- [20] CROUCH J D, CROUCH I W M, NG L. Transition prediction for three-dimensional boundary layers in computational fluid dynamics applications[J]. AIAA Journal, 2002, 40: 1536–1541.
doi: [10.2514/3.15228](https://doi.org/10.2514/3.15228)
- [21] RAJNARAYAN D, STURDZA P. Extensible rapid transition prediction for aircraft conceptual design using modal decomposition[C]//51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Grapevine (Dallas/Ft. Worth Region), Texas. Reston, Virginia: AIAA, 2013.
doi: [10.2514/6.2013-231](https://doi.org/10.2514/6.2013-231)
- [22] PINNA F, ZANUS L, DEMANGE S, et al. Reduced model for transition prediction in hypersonic flows[C]//2018 Fluid Dynamics Conference, Atlanta, Georgia. Reston, Virginia: AIAA, 2018.
DOI: [10.2514/6.2018-3697](https://doi.org/10.2514/6.2018-3697)
- [23] ZAFAR M I, XIAO H, CHOUDHARI M M, et al. Convolutional neural network for transition modeling based on linear stability theory[J]. Physical Review Fluids, 2020, 5(11): 113903.
doi: [10.1103/physrevfluids.5.113903](https://doi.org/10.1103/physrevfluids.5.113903)
- [24] NIE H, SONG W P, HAN Z H, et al. A surrogate-based e^N method for compressible boundary-layer transition prediction[J]. Journal of Aircraft, 2022, 59(1): 89–102.
doi: [10.2514/1.c036377](https://doi.org/10.2514/1.c036377)
- [25] NIE H, SONG W P, HAN Z H, et al. Application of surrogate models to stability analysis and transition prediction in hypersonic flows[J]. Advances in Aerodynamics, 2022, 4(1): 33.
doi: [10.1186/s42774-022-00120-2](https://doi.org/10.1186/s42774-022-00120-2)
- [26] 樊佳坤, 姚方舟, 黄江涛, 等. 深度学习在边界层流动稳定性分析中的应用[J]. 空气动力学学报, 2024, 42(3): 30–46.
FAN J K, YAO F Z, HUANG J T, et al. Application of deep learning in boundary layer flow instability analysis[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2024, 42(3): 30–46(in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2023.0073](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2023.0073)
- [27] 聂晗, 宋文萍, 韩忠华. 一种基于初值代理模型的线性稳定性分析方法: CN113343608B[P]. 2023-02-07.
- [28] 宋润杰. 高超声速三维边界层的流动稳定性及扰动演化[D]. 天津: 天津大学, 2020.
SONG R J. Flow stability and wave propagation in hypersonic three-dimensional boundary layers[D]. Tianjin: Tianjin University, 2020 (in Chinese).
doi: [10.27356/d.cnki.gtjdu.2020.000193](https://doi.org/10.27356/d.cnki.gtjdu.2020.000193)
- [29] EVANS D J, YOUSIF W S. The qz algorithm for the calculation of the eigenvalues of a real matrix[J]. Parallel Algorithms and Applications, 1994, 4(3-4): 183–192.
doi: [10.1080/10637199408915463](https://doi.org/10.1080/10637199408915463)
- [30] MALIK M, ORSZAG S. Efficient computation of the stability of three-dimensional compressible boundary layers[C]//14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, CA, USA. Reston, Virginia: AIAA, 1981.
doi: [10.2514/6.1981-1277](https://doi.org/10.2514/6.1981-1277)
- [31] LEHOUCQ R B, SORESENSEN D C, YANG C. ARPACK Users' Guide[M]. Mexico: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
doi: [10.1137/1.9780898719628](https://doi.org/10.1137/1.9780898719628)
- [32] CHANG C L. Langley stability and transition analysis code (LASTRAC) version 1.2 user manual: TM-2004-213233[R]. NASA, 2004.
- [33] MCCULLOCH W S, PITTS W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity[J]. The Bulletin of Mathematical Biophysics, 1943, 5(4): 115–133.
doi: [10.1007/BF02478259](https://doi.org/10.1007/BF02478259)
- [34] HORNIK K, STINCHCOMBE M, WHITE H. Multilayer feedforward networks are universal approximators[J]. Neural Networks, 1989, 2(5): 359–366.
doi: [10.1016/0893-6080\(89\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0893-6080(89)90020-8)

- [35] WU J L, YIN X L, XIAO H. Seeing permeability from images: fast prediction with convolutional neural networks[J]. Science Bulletin, 2018, 63(18): 1215–1222.
doi: [10.1016/j.scib.2018.08.006](https://doi.org/10.1016/j.scib.2018.08.006)
- [36] GU J X, WANG Z H, KUEN J, et al. Recent advances in convolutional neural networks[J]. Pattern Recognition, 2018, 77: 354–377.
doi: [10.1016/j.patcog.2017.10.013](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2017.10.013)
- [37] THUEREY N, WEIBENOW K, PRANTL L, et al. Deep learning methods for reynolds-averaged Navier–Stokes simulations of airfoil flows[J]. AIAA Journal, 2020, 58(1): 25–36.
doi: [10.2514/1.j058291](https://doi.org/10.2514/1.j058291)
- [38] RIBEIRO M D, REHMAN A, AHMED S, et al. DeepCFD: Efficient steady-state laminar flow approximation with deep convolutional neural networks[EB/OL]. 2020: arXiv: 2004.08826.
<http://arxiv.org/abs/2004.08826>
- [39] FEDOROV A. Prediction of cross-flow dominated transition on a supersonic swept wing[C]//50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Nashville, Tennessee. Reston, Virginia: AIAA, 2012.
doi: [10.2514/6.2012-920](https://doi.org/10.2514/6.2012-920)
- [40] SCHLICHTING H, GERSTEN K. Boundary-layer theory[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017.
doi: [10.1007/978-3-662-52919-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5)
- [41] KINGMA D P, BA J. Adam: A method for stochastic optimization[EB/OL]. 2014: arXiv: 1412.6980.
<http://arxiv.org/abs/1412.6980>
- [42] RANKA S, MOHAN C K, MEHROTRA K, et al. Characterization of a class of sigmoid functions with applications to neural networks[J]. Neural Networks, 1996, 9(5): 819–835.
doi: [10.1016/0893-6080\(95\)00107-7](https://doi.org/10.1016/0893-6080(95)00107-7)
- [43] GLOROT X, BORDES A, BENGIO Y. Deep sparse rectifier neural networks[C]// 14th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, Fort Lauderdale, FL, USA: PMLR, 2011.
- [44] MAAS A L, HANNUN A Y, NG A Y, et al. Rectifier nonlinearities improve neural network acoustic models[C]// International Conference on Machine Learning (ICML), 2013.
- [45] PASZKE A, GROSS S, MASSA F, et al. PyTorch: An imperative style, high-performance deep learning library[C]// 33rd International Conference on Neural Information Processing Systems, Vancouver, Canada: NIPS, 2019.
doi: [10.48550/arXiv.1912.01703](https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.01703)
- [46] 袁湘江, 周恒. 考虑流向曲率和压力梯度的可压缩边界层稳定性分析[J]. 空气动力学学报, 1998, 16(3): 276–281.
YUAN X J, ZHOU H. Stability analysis of compressible boundary layer considering flow curvature and pressure gradient[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 1998, 16(3): 276–281(in Chinese).
- [47] ALBA C, CASPER K, BERESH S, et al. Comparison of experimentally measured and computed second-mode disturbances in hypersonic boundary-layers[C]//48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida. Reston, Virginia: AIAA, 2010.
doi: [10.2514/6.2010-897](https://doi.org/10.2514/6.2010-897)

(本文责编: 张兴焕)